Специальность: <u>Автомеханик</u>
Курс: <u>1</u>, группа: <u>АМ 199</u>
Дисциплина: <u>Математика</u>
ФИО преподавателя: <u>Евстигнеева Е.А.</u>

08.04.2020. План урока

№ п/п	Этап занятия	Время, 1ч 30 мин	Прием и методы
1	Организационный этап	5	Онлайн через программу zoom
2	Изучение нового материала	30	Онлайн через программу zoom
3	Закрепление изученного материала	40	Комментарии к заданиям в Watsapp. видео-ответы на часто задаваемые вопросы (видео отправляется в группу Watsapp)
4	Подведение итогов, рефлексия	15	Консультации через Watsapp
5	Домашнее задание		Проверка с помощью теста google forms

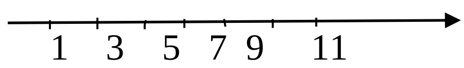
Дата: 08.04.2020

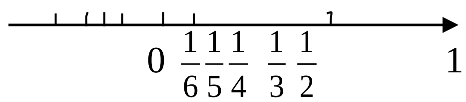
Тема: Предел последовательности. Бесконечно малые и большие последовательности.

<u>Сведения из теории</u>

Рассмотрим две числовые последовательности

(y_n):1, 3, 5, 7, 9, 11,…,2n-1,…; (x_n):1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},....,$

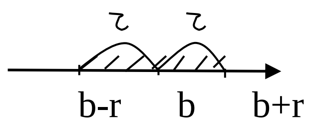




Заметим , что (y_n) –расходится, а (x_n)-сходится. У последовательности (x_n) все её члены «сгущаются» около точки 0. В математике не используют слова «точка сгущения», а используют термин «предел последовательности».
Итак, Если последовательность сходится, то она имеет предел.

<u>Определение 1:</u>

Окрестностью точки b называется промежуток, на котором точка b является внутренней.(r-радиус окрестности)



<u>Определение 2:</u>

Число b называется **пределом** последовательности (x_n), если все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, находятся в окрестности точки b.
Пишут так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ (читают: предел последовательности (x_n) при стремлении n к бесконечности равен b).
lim -сокращение латинского слова limes, обозначающего «предел» (сравните слово «лимит»).

Пояснение к определению

Если число b-предел последовательности, то образно выражаясь, окрестность точки b- это «ловушка» для последовательности: начиная с некоторого номера n_0 эта ловушка «заглатывает » x_{n0} и все последующие члены последовательности. Чем меньше выбирается окрестность, тем дольше «сопротивляется » последовательность, но потом всё равно попадает, в выбранную окрестность.

<u>Пример.</u> (x_n):1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},....,$- последовательность сходится к 0.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^m=0}$$

Теорема Вейерштрасса. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Приведём пример из геометрии, в котором используется теорема Вейерштрасса. Возьмём окружность и будем последовательно вписывать в неё правильные многоугольники: четырёхугольник, восьмиугольник, шестнадцатиугольник и т.д. Последовательность площадей этих правильных многоугольников возрастает и ограничена снизу числом 0, а сверху числом выражающим площадь описанного около окружности квадрата. Значит по т. Вейерштрасса последовательность сходится, её предел принимается за площадь круга.

Теоремы о пределах

1. Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности:
   $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:
   $\lim\limits_{n\to\infty}\left(k(a_n)\right) = k\lim\limits_{n\to\infty}(a_n);$
3. Предел суммы равен сумме пределов:
   $\lim\limits_{n\to\infty}\left((a_n)+(b_n)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(b_n);$
4. Предел произведения равен произведению пределов:
   $\lim\limits_{n\to\infty}\left((a_n)(b_n)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(b_n);$
5. Предел частного равен частному пределов:
   $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_n)}{(b_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$, при условии что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)\neq 0$ и $(b_n)\neq 0$ для любого n
6. Предел степени равен степени предела: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\right)^m$, где $m\in N$.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно малой***, если её предел равен нулю,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0 .$$

Пример

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, последовательность ($x_n$):1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$,- бесконечно малая

Последовательность(x_n)называется ***бесконечно большой***, если для любого положительного числа M , как бы велико оно ни было, существует такой номер N , что для всех (x_n) с номерами n>N справедливо неравенство $|x_n| > M$.

То есть, последовательность называется ***бесконечно большой***, если её предел равен бесконечности,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)=\infty$$

Пример

$\lim_{n\to\infty} n=\infty$, последовательность (z_n):1,2,3,4,5,…,n,… бесконечно большая.

Заметим, что если последовательность (x_n) является бесконечно малой (бесконечно большой), то $\frac{1}{(x_n)}$ - бесконечно большая (бесконечно малая).

Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n,\ldots$

Пусть $S_1=b_1$,

$S_2=b_1+b_2$,

$S_3=b_1+b_2+b_3$,

……………………

$S_n= b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$.

Получилась последовательность S_1, S_2, $S_3,\ldots$, $S_n,\ldots$ Как всякая последовательность она может сходится или расходится. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют суммой геометрической прогрессии.

Пусть надо найти сумму n первых членов геометрической прогрессии:

$S_n= b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$, то

$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Рассмотрим случай, когда знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q|<1$.

Найдём: $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n)=\frac{b_1}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}q^n\right)=\frac{b_1}{1-q}(1-0)=\frac{b_1}{1-q}$.

$$\boxed{S=\frac{b_1}{1-q} \quad \text{для} \quad |q|<1.}$$

Задание

Ответить на контрольные вопросы:

1) Дайте определение окрестности точки
2) Дайте определение и обозначение предела
3) Сформулируйте теорему Вейерштрасса

4) Сформулируйте теоремы о пределах
5) Дайте определение бесконечно малой, бесконечно большой последовательности, приведите примеры.
6) По какой формуле находится сумма геометрической прогрессии?

Задания для самостоятельного решения
(эталоны решений приведены среди данных заданий)

1.Вычислите пределы числовой последовательности.

$a)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2};$

$б)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-17}{n^3}\right);$

$в)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}+\frac{9}{n^3}\right);$

$г)\lim\limits_{n\to\infty}\left(6-\frac{7}{n^2}-\frac{3}{n}-\frac{3}{\sqrt{n}}\right);$

$д)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+3}{n+1};$

$е)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-1}{n^4};$

$з)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)}{n^2}$

2.Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если

$a)b_1=3; q=\frac{1}{3};$

$б)32,16,8,4,2,....;$

$в)b_n=(-1)^n\frac{5}{3^{n-3}}.$

3.Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n),если

$a)S=-10; b_1=-5;$ $б)S=2; b_1=3.$

4.Решите уравнение, если известно, что $|x|<1$:

$a)x+x^2+x^3+x^4+...+x^n+...=4;$

$б)2x-4x^2+8x^3-16x^4+...=\frac{3}{8};$

$в)\frac{1}{x}+x+x^2+x^3+x^4+...+x^n+...=\frac{7}{2};$

$г)2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+...=\frac{13}{6}.$

Некоторые решения и ответы (для проверки):

№1 **(з)**

$$з)\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-6n+1-3}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2}\right)=2-0-0=2;$$

№ 4 **(а, в)**

$a)x+x^2+x^3+x^4+...+x^n+...=4$, левая часть геометрическая прогрессия

$b_1=x; b_2=x^2; b_3=x^3....$

$q=\frac{x^2}{x}=x$, т.к $|x|<1$, можно применить формулу для суммы геометрической прогрессии $S=\frac{b_1}{1-q}$.

$$\frac{x}{1-x}=4,$$

$$\frac{x-4(1-x)}{1-x}=0,$$

$$5x-4=0(x\neq 1)$$

$$x=\frac{4}{5}$$

Ответ: $\frac{4}{5}$

в)

геометрическая прогрессия $b_1=x; q=x$; $|x|<1$

$$\frac{1}{x}+\overbrace{x+x^2+x^3+x^4+...+x^n+...}=\frac{7}{2};$$

$$\frac{1}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{7}{2},$$

$$\frac{9x^2-9x+2}{2x(1-x)}=0,$$

$$x_1=\frac{2}{3}, x_2=\frac{1}{3}, (x\neq 0, x\neq 1)$$

Ответ: $\frac{2}{3},\frac{1}{3}$.

Тест

1.Найдите сумму геометрической прогрессии 25, -5,1,…

1)30; 2) $20\frac{5}{6}$; 3)125; 4)25.

2.Найдите сумму геометрической прогрессии если $b_1=-1$; $q=0,2$.

1) $-1\frac{1}{4}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3)0,8; 4)10.

3.Вычислите пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}+2\right)$

1)6 ; 2) 2 ; 3)0 ; 4)∞.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-4}{n+2}$

1)-2 ; 2) ∞ ; 3)2 ; 4)6.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-4)(3n+1)}{7n^2}$

1)0; 2)$\frac{6}{7}$; 3) ∞ ; 4) $1\frac{1}{6}$.

Примечание:
Ответы на контрольные вопросы, задания для самостоятельного решения, тест (с обоснованием ответа, т.е. с решением) сдать в электронном формате (фото) до 21.00 ***09.04.2020****, прикрепив файл в программном обеспечении «Дистанция».*
В крайнем случае отправить на почту evgenia_evstigneeva@mail.ru

Внимание! На следующей паре планируется тестирование в google forms
(образец теста см. выше)